Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del Modelo 2 septiembre de 2000.

[2’5 puntos] considera la función $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=2+x-x^2$. Calcula α, $\alpha<2$ de forma que $\int_\alpha^2 f(x)\,dx = 9/2$

Solución

$f(x)=2+x-x^2$, $\alpha<2$

$9/2 = \int_\alpha^2 f(x)\,dx = \int_\alpha^2 (2+x-x^2)\,dx = [\,2x + (x^2)/2 - (x^3)/3\,]^2_\alpha = [(4+2-8/3) - (2\alpha + (\alpha^2)/2 - (\alpha^3)/3\,] = 9/2$

Operando se obtiene $0 = 2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 12\alpha - 7 = (\alpha+1)(\alpha+1)(2\alpha-7)$, por tanto las soluciones son $\alpha = -1$ y $\alpha = 7/2$. Solo cumple las condiciones del enunciado $\alpha = -1$

Ejercicio 2 de la opción A de septiembre de 2000.

[2’5 puntos] Calcula $\lim_{x\to 0} [x\,sen(x)] / tg(x^2)$

Solución

Hay que aplicar la regla de L’Hôpital (la teoría se puede ver en cualquier libro de texto)

$\lim_{x\to 0} [x\,sen(x)] / tg(x^2) = (0/0)$ {→ de L’Hôpital }

$= \lim_{x\to 0} [sen(x) + x.\cos(x)] / [1 + tg(x^2).2x] =$

$= \lim_{x\to 0} [\cos^2(x^2).(sen(x) + x.\cos(x))] / [2x] = (0/0)$ {→ de L’Hôpital }

$= \lim_{x\to 0} [2\cos x^2.(-sen x^2).2x.(sen x + x.\cos x) + \cos^2 x^2(\cos x+\cos x+x(-sen x))] / 2 =$

$= [0 + 1(2)] / 2 = 2/2 = 1$

Ejercicio 3 de la opción A de septiembre de 2000.

(a) [1’5 puntos] Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (0,2), (0,-2) y (-1,1).

(b) [1 punto] Determina los valores de “m” tales que el punto (3,m) esté en la circunferencia determinada en (a).

Solución

(a)

La ecuación de una circunferencia es de la forma $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, que desarrollándola se transforma en $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ con $c=a^2+b^2-r^2$. siendo C(a,b) el centro de la circunferencia y r el radio de ella.

Como pasa por los puntos (0,2), (0,-2) y (-1,1).entrando con estos puntos en la ecuación de la circunferencia se obtiene el siguiente sistema

$0+4-0+4b+c = 0$

$0+4-0+4b+c = 0$

$1+1+2a -2b+c = 0$,

y resolviéndolo se obtiene a=1, b=0 y c=-4

de donde $r = \sqrt{(a^2 + b^2 - c)} = \sqrt{(5)}$

por tanto la circunferencia pedida es $(x-1)^2+y^2=5$

(b)

Como $(3,m) \in$ a la circunferencia, $(3-1)^2 + m^2 = 5$. Resolviendo sale $m^2 = 1$, de donde $m = \pm 1$

Ejercicio 4 de la opción A de septiembre de 2000.-

Considera el sistema de ecuaciones

$$3x+2y-5z = 1$$
$$4x+y-2z = 3$$
$$2x-3y+az = b$$

(a) [1’5 puntos] Determina a y b sabiendo que el sistema tiene infinitas soluciones

(b) [1 punto] Resuelve el sistema resultante.

Solución

(a)

Como tiene que tener infinitas soluciones rango(A)=rango(A^*)=2 con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & a \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a & b \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5 \neq 0$, el rango de A ya es 2.

Para que rango(A)=2, tiene que ser det(A)=$|A|$=0

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = -5a + 44 = 0, \text{ de donde } a = 44/5$$

análogamente para que rango(B)=2, tiene que ser det(B)=$|B|$=0

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & b \end{vmatrix} = -5b + 25 = 0, \text{ de donde } b = 25/5 = 5$$

(b)
Si el rango es 2, sólo hay dos ecuaciones linealmente independientes que suponemos
$3x + 2y - 5z = 1$
$4x + y - 2z = 3$

$$\begin{cases} 3x+2y-5z=1 \\ 4x+y-2z=3 \end{cases} \equiv \begin{cases} 3x+2y=1+5z \\ 4x+y=3+2z \end{cases}$$

tomando $z = \lambda$, lo resolvemos por reducción
$4x + y = 3 + 2\lambda$ $\rightarrow$ $4x + y = 3 + 2\lambda$
$3x + 2y = 1 + 5\lambda$ 2ª + 1ª(-2) $\rightarrow$ $-5x = -5 + \lambda$ $\rightarrow$ $x = 1 - (1/5).\lambda$. Entrando en la 1ª
$4.(1 - (1/5).\lambda) + y = 3 + 2\lambda \rightarrow y = -1 + (14/5)\lambda$
es decir las soluciones son $(x,y,z) = (1 - (1/5).\lambda, -1 + (14/5).\lambda, \lambda)$, con $\lambda \in \Re$.

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B de septiembre de 2000.

[2'5 puntos] Determina el valor de las constantes a, c y c sabiendo que la gráfica de la función $f:\Re \rightarrow \Re$ definida por $f(x)= x(ax^2+bx+c)$ tiene un punto de inflexión en (-2,12) y que en dicho punto la recta tangente tiene por ecuación $10x+y+8=0$.

Solución

$f(x)=x(ax^2+bx+c)$
punto de inflexión en (-2,12) nos dice que $f(-2)=12$ y que $f''(-2)=0$
En dicho punto la recta tangente es $10x+y+8=0$, es decir $y=-10x-8$, con lo cual la pendiente de la recta tangente en x=-2 es –10 de donde $f'(-2)=0$
$f(x)=ax^3+bx^2+cx$; $f'(x)=3ax^2+2bx+c$; $f''(x)=6ax+2b$
De $f''(-2)=0$ obtenemos $0=-12a+2b$
De $f(-2)=12$ obtenemos $12=-8a+4b-2c$
De $f'(-2)=0$ obtenemos $-10=12a-4b+c$.
Resolviendo este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas obtenemos a=1, b=6 y c=2.

Ejercicio 2 de la opción B de septiembre de 2000.

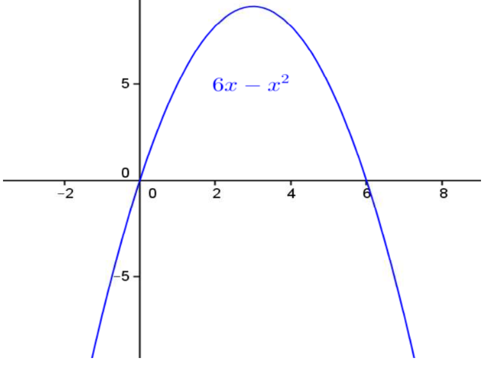
[2'5 puntos]Calcula el valor de α, positivo, para que el área encerrada por la curva $y = \alpha x - x^2$ y el eje de abcisas sea 36. Representa la curva que se obtiene para dicho valor de α.

Solución

$\alpha>0$, $\alpha x - x^2 = 0$ de donde $x(\alpha - x) = 0$ y sus soluciones son $x = 0$ y $x = \alpha$

Área = 36 = $\int_0^\alpha f(x)\,dx = \int_0^\alpha (\alpha x - x^2)\,dx = [\,\alpha(x^2)/2 - (x^3)/3\,]_0^\alpha = (\alpha^3)/2 - (\alpha^3)/3 = (\alpha^3)/6$

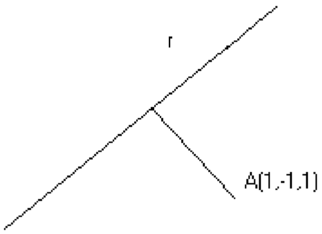
Resolviendo tenemos $\alpha^3 = 6^3$, de donde $\alpha=6$.
Nos piden la gráfica de $y = 6x - x^2$.
Cortes (0,0), (6,0) y vértice de la parábola V(3,9)



Ejercicio 3 de la opción B de septiembre de 2000.

[2'5 puntos] Calcula el punto de la recta de ecuaciones (z-1) = (y+2)/2 = (z+1)/(-3) mas cercano al punto A=(1,-1,1).

Solución



Dada la recta (z-1) = (y+2)/2 = (z+1)/(-3) , un punto suyo es M(1,2,-1) y un vector director **v** = (1,2,-3)
El punto mas cercano es el que está en el corte con la recta perpendicular a r por (1,-1,1)
Plano Π perpendicular a r por (1,-1,1) tiene como vector normal el director de la recta (1,2,-3)
$\Pi \equiv 0 = 1(x-1) + 2(y+1) - 3(z-1) = x + 2y - 3z + 4$
Para hallar el punto intersección de la recta con el plano ponemos la recta en paramétricas, sustituimos en la ecuación del plano y obtenemos el valor de λ, el cual lo sustituiremos en la recta y obtendremos las ecuaciones del punto buscado
(z-1) = (y+2)/2 = (z+1)/(-3) = λ, de donde
$x = 1 + \lambda$, $y = -2 + 2\lambda$, $z = -1 - 3\lambda$. Entrando en el plano tenemos
$(1+\lambda)+2(-2+2\lambda)-3(-1-3\lambda)=0$. Resolviéndolo se obtiene $\lambda = -2/7$, con lo cual el punto pedido es
(x,y,z) = (1-2/7, -2+2(-2/7), -1-3(-2/7)) = (5/7, - 18/7, - 1/7).

Ejercicio 4 de la opción B de septiembre de 2000.

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 3 \\ 4 & 1 & -b \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Determina para que valores del parámetro b existe A^{-1}.
(b) [1'5 puntos] Calcula A^{-1} para b=2.

Solución

(a) Existe A^{-1} sii $\det(A)\neq 0$;

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 3 \\ 4 & 1 & -b \end{vmatrix} = -b^2 + 4b - 3$$

Resolviendo la ecuación $-b^2 + 4b - 3 = 0$ se obtiene b = 1 y b = 3, por tanto **existe A^{-1} si y solo si $b \neq 1$ y $b \neq 3$**

(b)

Si b=2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y su matriz inversa es $A^{-1} = 1/|A|.Adj(A^t)$; $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Luego $A^{-1} = 1/|A|.Adj(A^t) = (1/1). \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$